



## 实验27

 $\pi$  值的计算

本工作页汇集使用**Mathcad**模拟或者计算圆周率的各种方法：

(1) 下面这个程序是用蒙特卡罗法求圆周率  $p$ ：

```
Pi(N) :=
  k ← 0
  break if N = 0
  for i ∈ 1..N
    | xi ← rnd(1)
    | yi ← rnd(1)
    | ri ← √(xi2 + yi2)
    | k ← k + 1 if ri ≤ 1
  k ←  $\frac{4 \cdot k}{N}$ 
  pi ← k
```

Pi(10000) = 3.1312

(2) 下面是用蒲丰投针法模拟圆周率  $p$ ：

```
pp(N) :=
  j ← 0
  a ← 2
  l ← 2
  break if N = 0
  for k ∈ 1..N
    | φ ← rnd(π)
    | xk ← rnd(a)
    | j ← j + 1 if xk ≤ 1 · sin(φ)
  pp ←  $\frac{2 \cdot N \cdot l}{a \cdot j}$ 
```

pp(12000) = 3.15498882608124

(3) 下面这个程序是用欧拉公式求圆周率  $p$ ：

```
pi_value :=
  (s ← 0 i ← 1)
  term ←  $\frac{1}{i^2}$ 
  while term ≥ 0.00000001
    | s ← s + term
    | term ←  $\frac{1}{i^2}$ 
    | i ← i + 1
  pi ← √6s
```

pi\_value = 3.9835919006706

(4) 下面的程序是用瓦里斯公式计算圆周率  $p$ ：

```
pi :=
  s ← 1
  for k ∈ 1..103
    | t ←  $\frac{k}{k+1}$  if floor( $\frac{k}{2}$ ) · 2 = k
    | t ←  $\frac{k+1}{k}$  otherwise
    | s ← s · t
  2 · s
```

pi = 3.14002381860059

(5) 根据马信公式计算圆周率： $16 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{239}\right) = 3.14159265358979$

$$\arctan(x, n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2 \cdot k - 1} \quad P := 16 \cdot \arctan(0.2, 6) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}, 6\right)$$

$$P = 3.14159265261531$$

```
Arctg(x, n) :=
  s ← 0
  sig ← 1
  for k ∈ 1, 3 .. 2 · n - 1
    s ← s + sig ·  $\frac{x^k}{k}$ 
    sig ← -sig
  s
```

$$\pi := 4 \cdot \operatorname{Arctg}(1, 10000) \quad \pi = 3.14149265359003$$

$$P\pi := 16 \cdot \operatorname{Arctg}(0.2, 5) - 4 \cdot \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{239}, 5\right) \quad P\pi = 3.1415926824044$$

可以看到使用Mathin公式计算 $\pi$  将会大大地提高计算速度和精度.

(6) Borwein四次迭代式计算圆周率的迭代程序,  
这个公式由Jonathan Borwein和Peter Borwein于1985年发表, 它四次收敛于 $\pi$ .

```
y(n) :=
  y0 ←  $\sqrt{2} - 1$ 
  A0 ←  $6 - 4\sqrt{2}$ 
  for k ∈ 1 .. n
    yk ←  $\frac{1 - \sqrt{1 - (y_{k-1})^4}}{1 + \sqrt{1 - (y_{k-1})^4}}$ 
    Ak ←  $A_{k-1} \cdot (1 + y_k)^4 - 2^{2k+1} \cdot y_k \cdot [1 + y_k + (y_k)^2]$ 
  p ←  $\frac{1}{A_n}$ 
```

$$y(2) = 3.14159265358979$$

建议学生搜集有关 $\pi$  值的资料, 编写程序或给出计算公式加以计算.